V11.0

ECONOMETRÍA APLICADA

JOSÉ ALBERTO MAURICIO

S4

ANÁLISIS UNIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES

PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA

Departamento de Análisis Económico y Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

1. PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA - ASPECTOS TEÓRICOS

$$Y_t \sim \text{ARIMA}(p,d,q) \times \text{ARIMA}(P,D,Q)_S$$

Previsión Puntual de Y_t en **Origen** N (dado) a **Horizonte** $l \geq 1$:

$$Y_N(l) = \text{E}_N[Y_{N+l}], \text{ con } l = 1, 2, \ldots \qquad [1]$$

Error de Previsión en **Origen** N (dado) a **Horizonte** $l \geq 1$:

$$\mathcal{E}_N^Y(l) = Y_{N+l} - Y_N(l), \text{ con } l = 1, 2, \ldots \qquad [2]$$

EJEMPLO - Previsión Puntual con un Modelo ARMA(1,1)

1. Escribir el modelo dejando en su lado izquierdo solamente Y_t:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}. \qquad [3]$$

2. Escribir la expresión [3] del paso 1 en $t = N + l$:

$$Y_{N+l} = \mu + \phi_1 Y_{N+l-1} + A_{N+l} - \theta_1 A_{N+l-1}. \qquad [4]$$

3. Aplicar $\text{E}_N[\cdot]$ a la expresión [4] del paso 2 para obtener $Y_N(l)$ en [1]:

$$Y_N(l) = \mu + \phi_1 \text{E}_N[Y_{N+l-1}] + \text{E}_N[A_{N+l}] - \theta_1 \text{E}_N[A_{N+l-1}]. \qquad [5]$$

4. Particularizar y desarrollar la expresión [5] del paso 3 para $l = 1, 2, 3, \ldots$:

$l = 1$:

$$\begin{aligned} Y_N(1) &= \mu + \phi_1 \underbrace{\text{E}_N[Y_N]}_{Y_N \ \text{(R1)}} + \underbrace{\text{E}_N[A_{N+1}]}_{0 \ \text{(R4)}} - \theta_1 \underbrace{\text{E}_N[A_N]}_{A_N \ \text{(R2)}} \\ &= \mu + \phi_1 Y_N - \theta_1 A_N. \end{aligned} \qquad [5.1]$$

$l = 2$:

$$\begin{aligned} Y_N(2) &= \mu + \phi_1 \underbrace{\text{E}_N[Y_{N+1}]}_{Y_N(1) \ \text{(R3)}} + \underbrace{\text{E}_N[A_{N+2}]}_{0 \ \text{(R4)}} - \theta_1 \underbrace{\text{E}_N[A_{N+1}]}_{0 \ \text{(R4)}} \\ &= \mu + \phi_1 Y_N(1) \\ &= \mu + \phi_1[\mu + \phi_1 Y_N - \theta_1 A_N] = (1+\phi_1)\mu + \phi_1(\phi_1 Y_N - \theta_1 A_N). \end{aligned} \qquad [5.2]$$

$l = 3$:

$$
\begin{aligned}
Y_N(3) &= \mu + \phi_1 \underbrace{\mathrm{E}_N[Y_{N+2}]}_{Y_N(2)\ \text{(R3)}} + \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+3}]}_{0\ \text{(R4)}} - \theta_1 \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+2}]}_{0\ \text{(R4)}} \\
&= \mu + \phi_1 Y_N(2) \\
&= \mu + \phi_1[(1+\phi_1)\mu + \phi_1(\phi_1 Y_N - \theta_1 A_N)] \\
&= (1 + \phi_1 + \phi_1^2)\mu + \phi_1^2(\phi_1 Y_N - \theta_1 A_N).
\end{aligned}
\qquad [5.3]
$$

...

5. Generalizar las expresiones [5.1]-[5.3] del paso 4 para cualquier valor del horizonte $l \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
Y_N(1) &= \mu + \phi_1 Y_N - \theta_1 A_N, \\
Y_N(l) &= \mu + \phi_1 Y_N(l-1) \text{ para } l \geq 2.
\end{aligned}
\qquad [6]
$$

La expresión [6] es la **función de previsión** de un modelo ARMA(1,1), que también se puede escribir como

$$Y_N(l) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^i\right)\mu + \phi_1^{l-1}(\phi_1 Y_N - \theta_1 A_N) \text{ para todo } l \geq 1. \qquad [7]$$

Cuando $|\phi_1| < 1$, $Y_N(l) \to \frac{\mu}{1-\phi_1}$ [la media teórica de un ARMA(1,1) estacionario].

EJEMPLO - Previsión Puntual con un Modelo AR(1)

$\theta_1 = 0$ [6] $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
Y_N(1) &= \mu + \phi_1 Y_N, \\
Y_N(l) &= \mu + \phi_1 Y_N(l-1) \text{ para } l \geq 2.
\end{aligned}
\qquad [8.1]
$$

$\theta_1 = 0$ [7] $\Rightarrow$ $$Y_N(l) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^i\right)\mu + \phi_1^l Y_N \text{ para todo } l \geq 1. \qquad [8.2]$$

Cuando $|\phi_1| < 1$, $Y_N(l) \to \frac{\mu}{1-\phi_1}$ [la media teórica de un AR(1) estacionario].

EJEMPLO - Previsión Puntual con un Modelo MA(1)

$\phi_1 = 0$ [6] $\Rightarrow$ $$Y_N(1) = \mu - \theta_1 A_N,\ Y_N(l) = \mu \text{ para } l \geq 2. \qquad [9]$$

$Y_N(l) \to \mu$ [la media teórica de un MA(1)].

EJEMPLO - Previsión Puntual con un Paseo Aleatorio

$\phi_1 = 1$ [8.1] $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
Y_N(1) &= \mu + Y_N, \\
Y_N(l) &= \mu + Y_N(l-1) \text{ para } l \geq 2.
\end{aligned}
\qquad [10.1]
$$

$\phi_1 = 1$ [8.2] $\Rightarrow$ $$Y_N(l) = l \times \mu + Y_N \text{ para todo } l \geq 1, \qquad [10.2]$$

que es una función estrictamente creciente ($\mu > 0$) o decreciente ($\mu < 0$) cuando $\mu \neq 0$.

Conclusiones Generales Importantes I

(1) En cualquier modelo estacionario, la función de previsión converge a la media teórica del modelo. (2) En modelos no estacionarios, la función de previsión puede no converger.

La Función de Previsión de un Modelo ARIMA

$$\phi(B)\Phi(B^S)[\nabla^d\nabla_S^D Y_t - \beta_0] = \theta(B)\Theta(B)A_t. \qquad [11]$$

$$\Phi^*(B)Y_t = \mu + \Theta^*(B)A_t, \qquad [12]$$

$$\begin{gathered}\Phi^*(B) = \phi(B)\Phi(B^S)\nabla^d\nabla_S^D = 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^* B^i, \text{ con} \\ p^* = (p+d) + (P+D)\times S,\end{gathered} \qquad [13]$$

$$\begin{gathered}\Theta^*(B) = \theta(B)\Theta(B^S) = 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^* B^i, \text{ con} \\ q^* = q + Q\times S,\end{gathered} \qquad [14]$$

$$\mu = [\phi(1)\Phi(1)]\times\beta_0. \qquad [15]$$

[11]-[15] $\Rightarrow$
$$Y_t = \mu + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^* Y_{t-i} + A_t - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^* A_{t-i}. \qquad [16]$$

[16] $\Rightarrow$
$$Y_{N+l} = \mu + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^* Y_{N+l-i} + A_{N+l} - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^* A_{N+l-i}. \qquad [17]$$

[17] $\Rightarrow$
$$\begin{aligned}Y_N(l) = \mathrm{E}_N[Y_{N+l}] = \mu + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^*\mathrm{E}_N[Y_{N+l-i}] + \mathrm{E}_N[A_{N+l}] \\ - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^*\mathrm{E}_N[A_{N+l-i}]\ (l = 1, 2, \ldots),\end{aligned} \qquad [18]$$

con (muy importante)

$$\begin{aligned}&\mathrm{R1}:\ \mathrm{E}_N[Y_j] = Y_j \ \text{ si } \ j \le N, \\ &\mathrm{R2}:\ \mathrm{E}_N[A_j] = A_j \ \text{ si } \ j \le N, \\ &\mathrm{R3}:\ \mathrm{E}_N[Y_j] = Y_N(j-N) \ \text{ si } \ j > N, \\ &\mathrm{R4}:\ \mathrm{E}_N[A_j] = \mathrm{E}[A_j] = 0 \ \text{ si } \ j > N.\end{aligned} \qquad [19]$$

Errores de Previsión

Representación PSI (MA) de $Y_t \sim \mathrm{ARIMA}(p,d,q)\times\mathrm{ARIMA}(P,D,Q)_S$ (➪ S1):

$$Y_t = \beta_t + A_t + \psi_1 A_{t-1} + \psi_2 A_{t-2} + \ldots \qquad [20]$$

[20] $\Rightarrow$ $$Y_{N+l} = \beta_{N+l} + A_{N+l} + \psi_1 A_{N+l-1} + \psi_2 A_{N+l-2} + \ldots \quad [21]$$

[21] $\Rightarrow$ $$Y_N(l) = \beta_{N+l} + \mathrm{E}_N[A_{N+l}] + \psi_1 \mathrm{E}_N[A_{N+l-1}] + \psi_2 \mathrm{E}_N[A_{N+l-2}] + \ldots \quad [22]$$

$l = 1$: $$\mathcal{E}_N^Y(1) = Y_{N+1} - Y_N(1) = A_{N+1}.$$

$l = 2$: $$\mathcal{E}_N^Y(2) = Y_{N+2} - Y_N(2) = A_{N+2} + \psi_1 A_{N+1}.$$

$l = 3$: $$\mathcal{E}_N^Y(3) = Y_{N+3} - Y_N(3) = A_{N+3} + \psi_1 A_{N+2} + \psi_2 A_{N+1}.$$

...

$$\mathcal{E}_N^Y(l) = \textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i A_{N+l-i} \text{ para todo } l \geq 1. \quad [23]$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{E}[\mathcal{E}_N^Y(l)] = 0 \text{ para todo } l \geq 1, \quad [24]$$

$$v(l) = \mathrm{Var}[\mathcal{E}_N^Y(l)] = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2\right)\sigma_A^2 \text{ para todo } l \geq 1 \left[\Rightarrow v(1) = \sigma_A^2\right]. \quad [25]$$

EJEMPLO - Varianzas de los Errores de Previsión en un Modelo ARMA(1,1)

➪ S1 $$\psi_0 = 1,\ \psi_i = \phi_1^{i-1}(\phi_1 - \theta_1) \text{ para } i \geq 1, \quad [26]$$

[25] $\Rightarrow$ $$v(1) = \sigma_A^2,\ v(l) = \left[1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \textstyle\sum_{i=1}^{l-1} \phi_1^{2(i-1)}\right]\sigma_A^2 \text{ para } l \geq 2. \quad [27]$$

Cuando $|\phi_1| < 1$,

$$v(l) \to \left[1 + \frac{(\phi_1 - \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2}\right] \times \sigma_A^2 \quad [28]$$

[la varianza teórica de un ARMA(1,1) estacionario].

EJEMPLO - Varianzas de los Errores de Previsión en un Modelo AR(1)

➪ S1 $$\psi_i = \phi_1^i \text{ para todo } i \geq 0, \quad [29]$$

[25] $\Rightarrow$ $$v(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^{2i}\right)\sigma_A^2 \text{ para todo } l \geq 1. \quad [30]$$

Cuando $|\phi_1| < 1$,

$$v(l) \to \frac{1}{1 - \phi_1^2} \times \sigma_A^2 \quad [31]$$

[la varianza teórica de un AR(1) estacionario].

EJEMPLO - Varianzas de los Errores de Previsión en un Modelo MA(1)

➪ S1 $$\psi_0 = 1,\ \psi_1 = -\theta_1,\ \psi_i = 0 \text{ para } i \geq 2, \quad [32]$$

[25] $\Rightarrow$ $$v(1) = \sigma_A^2\,,\;\; v(l) = (1+\theta_1^2)\sigma_A^2 \;\;\text{(constante) para } l \geq 2. \qquad [33]$$

$$v(l) \to (1+\theta_1^2)\sigma_A^2 \qquad [34]$$

[la varianza teórica de un MA(1)].

EJEMPLO - Varianzas de los Errores de Previsión en un Paseo Aleatorio

$\phi_1 = 1$ [29] $\Rightarrow$ $$\psi_i = 1 \text{ para todo } i \geq 0, \qquad [35]$$

$\phi_1 = 1$ [30] $\Rightarrow$ $$v(l) = l \times \sigma_A^2 \text{ para todo } l \geq 1 \qquad [36]$$

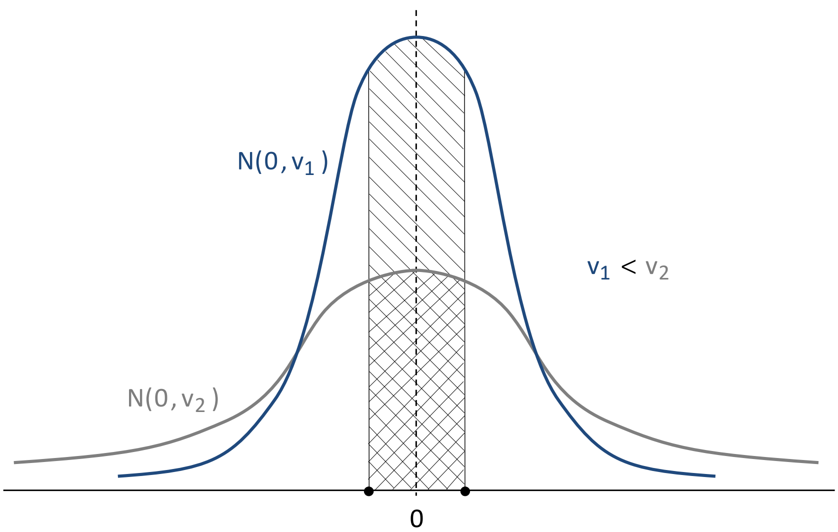
[una función estrictamente creciente con el horizonte de previsión].

Conclusiones Generales Importantes II

(3) Los errores de previsión, sus valores esperados, y sus varianzas, se pueden expresar en cualquier modelo ARIMA (estacionario o no estacionario) como en [23]-[25], por lo que (4) los errores de previsión siempre tienen esperanza cero, (5) en cualquier modelo estacionario ($\psi_i \to 0$; ➪ S1) las varianzas de los errores de previsión convergen a la varianza teórica del modelo, y (6) en modelos no estacionarios ($\psi_i \overset{\text{no}}{\to} 0$; ➪ S1) las varianzas de los errores de previsión crecen ilimitadamente con el horizonte de previsión.

Importancia de las Varianzas de los Errores de Previsión

Cuando en un modelo ARIMA cada A_t sigue una distribución Normal, [23] $\Rightarrow$ cualquier error de previsión también sigue una distribución Normal:



La probabilidad de cometer un error de previsión "pequeño" (próximo a cero) es tanto más elevada cuanto más pequeña es la varianza del error de previsión. Por lo tanto, la varianza de un error de previsión es una medida de la fiabilidad de la previsión puntual correspondiente.

2. PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA - CÁLCULOS

EJEMPLO - Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo ARMA(1,1)

[6] $\Rightarrow$ $$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 y_N - \hat{\theta}_1 \hat{a}_N\,,\;\; \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 \hat{y}_N(l-1) \text{ para } l \geq 2.$$

EJEMPLO - Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo AR(1)

[8.1] $\Rightarrow$ $$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 y_N\,,\; \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 \hat{y}_N(l-1) \text{ para } l \geq 2.$$

EJEMPLO - Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo MA(1)

[9] $\Rightarrow$ $$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} - \hat{\theta}_1 \hat{a}_N\,,\; \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} \text{ para } l \geq 2.$$

EJEMPLO - Cálculo de Previsiones Puntuales con un Paseo Aleatorio

[10.1] $\Rightarrow$ $$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} + y_N\,,\; \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} + \hat{y}_N(l-1) \text{ para } l \geq 2.$$

Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo ARIMA

[18] $\Rightarrow$ $$\begin{aligned}\hat{y}_N(l) = \hat{\mathrm{E}}_N[Y_{N+l}] = \hat{\mu} + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*} \hat{\Phi}_i^* \hat{\mathrm{E}}_N[Y_{N+l-i}] + \hat{\mathrm{E}}_N[A_{N+l}] \\ - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*} \hat{\Theta}_i^* \hat{\mathrm{E}}_N[A_{N+l-i}] \;(l = 1, 2, \ldots),\end{aligned} \qquad [37]$$

con (muy importante)

[19] $\Rightarrow$ $$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{R1}} &: \;\hat{\mathrm{E}}_N[Y_j] = y_j \text{ si } j \leq N, \\ \widehat{\mathrm{R2}} &: \;\hat{\mathrm{E}}_N[A_j] = \hat{a}_j \text{ si } j \leq N, \\ \widehat{\mathrm{R3}} &: \;\hat{\mathrm{E}}_N[Y_j] = \hat{y}_N(j-N) \text{ si } j > N, \\ \widehat{\mathrm{R4}} &: \;\hat{\mathrm{E}}_N[A_j] = 0 \text{ si } j > N.\end{aligned} \qquad [38]$$

Varianzas Estimadas de los Errores de Previsión

[25] $\Rightarrow$ $$\hat{v}(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \hat{\psi}_i^2\right)\hat{\sigma}_A^2 \text{ para todo } l \geq 1 \left[\Rightarrow \hat{v}(1) = \hat{\sigma}_A^2\right]. \qquad [39]$$

Estimación de Intervalos de Confianza y Probabilidades

$$\widehat{\mathrm{IC}}_{95\%}[Y_{N+l}] = \left[\hat{y}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}\right], \qquad [40]$$

$$\widehat{\Pr}[a \le Y_{N+l} \le b] = \Pr\left[\frac{a-\hat{y}_N(l)}{\sqrt{\hat{v}(l)}} \le \mathrm{N}(0,1) \le \frac{b-\hat{y}_N(l)}{\sqrt{\hat{v}(l)}}\right] \; (l=1,2,...). \qquad [41]$$

Cálculos referidos a la Transformación Logarítmica

Si una serie original x_t requiere una transformación logarítmica para estabilizar su dispersión, entonces los cálculos en [37]-[41] se refieren a la serie $y_t = \ln(x_t)$. Por lo tanto, cada previsión puntual para la serie original $x_t = \exp\{y_t\}$ (con $\exp\{y_t\} = e^{y_t}$) se puede calcular simplemente como $\hat{x}_N(l) = \exp\{\hat{y}_N(l)\}$, y el intervalo de confianza correspondiente como $\left[\exp\left\{\hat{y}_N(l) - 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}\right\},\ \exp\left\{\hat{y}_N(l) + 1.96\sqrt{\hat{v}(l)}\right\}\right]$, que no es simétrico con respecto a $\hat{x}_N(l)$. Un intervalo de confianza que sí es simétrico se puede calcular como $\left[\hat{x}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{w}(l)}\right]$, donde $\hat{w}(l) = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l)$ es una aproximación [*] a la varianza estimada del error de previsión asociado con la serie x_t original.

[*] Una aproximación de Taylor de grado 1 (lineal) al valor de la función $\ln(x)$ alrededor de x_0 (dado) proporciona lo siguiente:

$$\ln(x) \approx \ln(x_0) + \tfrac{d\ln(x_0)}{dx}(x-x_0) = \ln(x_0) + \tfrac{1}{x_0}(x-x_0), \text{ o bien}$$

$$x - x_0 \approx x_0 \times [\ln(x) - \ln(x_0)].$$

Con $x = X_{N+l}$, $x_0 = X_N(l)$ (dado), la expresión anterior implica que

$$\underbrace{X_{N+l} - X_N(l)}_{\mathcal{E}_N^X(l)} \approx X_N(l) \times \{\underbrace{\overbrace{\ln(X_{N+l})}^{Y_{N+l}} - \overbrace{\ln[X_N(l)]}^{Y_N(l)}}_{\mathcal{E}_N^Y(l)}\}.$$

Por lo tanto,

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left[\mathcal{E}_N^X(l)\right] \approx \hat{x}_N(l)^2 \times \underbrace{\widehat{\mathrm{Var}}\left[\mathcal{E}_N^Y(l)\right]}_{\hat{v}(l)} = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l) = \hat{w}(l).$$

En la práctica, la transformación logarítmica suele "deshacerse" con los cálculos siguientes:

$$\hat{x}_N(l) = \exp\{\hat{y}_N(l)\},\ \hat{w}(l) = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l), \qquad [42]$$

$$\widehat{\mathrm{IC}}_{95\%}[X_{N+l}] = \left[\hat{x}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{w}(l)}\right], \qquad [43]$$

$$\widehat{\Pr}[a \le X_{N+l} \le b] = \Pr\left[\frac{a-\hat{x}_N(l)}{\sqrt{\hat{w}(l)}} \le \mathrm{N}(0,1) \le \frac{b-\hat{x}_N(l)}{\sqrt{\hat{w}(l)}}\right] \; (l=1,2,...). \qquad [44]$$

3. EJEMPLO - ST17 : Y = BJRA

Modelo M1: ARMA(1,1) con MEDIA

Dependent Variable: Y Sample(adjusted): 2 197 Included observations: 196 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	17.11141	0.110643	154.6537	0.0000
AR(1)	0.917624	0.041351	22.19102	0.0000
MA(1)	-0.608054	0.081951	-7.419684	0.0000
S.E. of regression	0.313900	Akaike info criterion		0.535700
Sum squared resid	19.01686	Schwarz criterion		0.585876

$$(1-\phi_1 B)(Y_t-\beta_0)=(1-\theta_1 B)A_t \Rightarrow Y_t = \underbrace{[(1-\phi_1)\beta_0]}_{\mu}+\phi_1 Y_{t-1}+A_t-\theta_1 A_{t-1}.$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= 17.11141,\\ \hat{\phi}_1 &= 0.917624,\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\mu}=(1-\hat{\phi}_1)\hat{\beta}_0 = 1.40957,$$

$$\hat{\theta}_1 = 0.608054,\quad y_{197}=17.4,\quad \hat{a}_{197}=-0.034957.$$

Previsiones Puntuales M1

$$\begin{aligned}Y_{197}(1) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{198}]\\ &= \mathrm{E}_{197}[\mu+\phi_1 Y_{197}+A_{198}-\theta_1 A_{197}] = \mu+\phi_1 Y_{197}-\theta_1 A_{197}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{197}(1) &= \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{198}] = \hat{\mu}+\hat{\phi}_1\times y_{197}-\hat{\theta}_1\times \hat{a}_{197}\\ &= 1.40957+0.917624\times 17.4-0.608054\times(-0.034957) = 17.39748.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_{197}(2) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{199}]\\ &= \mathrm{E}_{197}[\mu+\phi_1 Y_{198}+A_{199}-\theta_1 A_{198}] = \mu+\phi_1 Y_{197}(1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{197}(2) &= \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{199}] = \hat{\mu}+\hat{\phi}_1\times \hat{y}_{197}(1)\\ &= 1.40957+0.917624\times 17.39748 = 17.37392.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_{197}(3) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{200}]\\ &= \mathrm{E}_{197}[\mu+\phi_1 Y_{199}+A_{200}-\theta_1 A_{199}] = \mu+\phi_1 Y_{197}(2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{197}(3) &= \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{200}] = \hat{\mu}+\hat{\phi}_1\times \hat{y}_{197}(2)\\ &= 1.40957+0.917624\times 17.37392 = 17.35229.\end{aligned}$$

Modelo M2: IMA(1,1)

Dependent Variable: D(Y)				
Sample(adjusted): 2 197				
Included observations: 196 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.702478	0.051036	-13.76448	0.0000
S.E. of regression	0.317607	Akaike info criterion		0.549087
Sum squared resid	19.67052	Schwarz criterion		0.565812

$$\nabla Y_t = (1-\theta_1 B)A_t \Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

$$\hat{\theta}_1 = 0.702478,\ \ y_{197} = 17.4,\ \ \hat{a}_{197} = -0.149070.$$

Previsiones Puntuales M2

$$Y_{197}(1) = \mathrm{E}_{197}[Y_{198}] = \mathrm{E}_{197}[Y_{197} + A_{198} - \theta_1 A_{197}] = Y_{197} - \theta_1 A_{197}.$$

$$\hat{y}_{197}(1) = \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{198}] = y_{197} - \hat{\theta}_1 \times \hat{a}_{197} = 17.4 - 0.702478 \times (-0.149070) = 17.50472.$$

$$Y_{197}(2) = \mathrm{E}_{197}[Y_{199}] = \mathrm{E}_{197}[Y_{198} + A_{199} - \theta_1 A_{198}] = Y_{197}(1).$$

$$\hat{y}_{197}(2) = \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{199}] = \hat{y}_{197}(1) = 17.50472.$$

$$Y_{197}(3) = \mathrm{E}_{197}[Y_{200}] = \mathrm{E}_{197}[Y_{199} + A_{200} - \theta_1 A_{199}] = Y_{197}(2).$$

$$\hat{y}_{197}(3) = \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{200}] = \hat{y}_{197}(2) = 17.50472.$$

4. EJEMPLO - ST20 : Y = TPARO

➪ S2:EJ6

Modelo M1: ARI(1,1)×AR(1)$_4$

Dependent Variable: D(TPARO)				
Sample(adjusted): 1981:3 2000:4				
Included observations: 78 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.504119	0.099914	5.045524	0.0000
SAR(4)	0.618084	0.091276	6.771571	0.0000
S.E. of regression	0.407059	Akaike info criterion		1.065589
Sum squared resid	12.59296	Schwarz criterion		1.126017

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^4)\nabla Y_t = A_t \Rightarrow (1-\phi_1 B - \Phi_1 B^4 + \phi_1\Phi_1 B^5)(1-B)Y_t = A_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \Phi_1(Y_{t-4} - Y_{t-5}) - \phi_1\Phi_1(Y_{t-5} - Y_{t-6}) + A_t.$$

$$\hat{\phi}_1 = 0.504119, \hat{\Phi}_1 = 0.618084 \Rightarrow \hat{\phi}_1\hat{\Phi}_1 = 0.311588.$$

Modelo M2: IMA(2,1)×IMA(1,1)$_4$

Dependent Variable: D(TPARO, 2, 4)				
Sample(adjusted): 1981:3 2000:4				
Included observations: 78 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.366535	0.101409	-3.614440	0.0005
SMA(4)	-0.902203	0.039382	-22.90915	0.0000
S.E. of regression	0.378918	Akaike info criterion		0.922314
Sum squared resid	10.91201	Schwarz criterion		0.982742

$$\nabla^2 \nabla_4 Y_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4) A_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 - B)^2 (1 - B^4) Y_t = (1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^4 + \theta_1 \Theta_1 B^5) A_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 - 2B + B^2)(Y_t - Y_{t-4}) = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \Theta_1 A_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y_t = Y_{t-4} + 2(Y_{t-1} - Y_{t-5}) - (Y_{t-2} - Y_{t-6}) + A_t - \theta_1 A_{t-1} - \Theta_1 A_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-5}.$$
$$\hat{\theta}_1 = 0.366535, \hat{\Theta}_1 = 0.902203 \Rightarrow \hat{\theta}_1 \hat{\Theta}_1 = 0.330689.$$

Fechas	Observaciones	Serie Y	Residuos M1	Residuos M2
1999:3	N–5	15.29	0.553482	0.950085
1999:4	N–4	15.32	0.197744	0.204778
2000:1	N–3	14.89	0.196870	−0.189197
2000:2	N–2	13.83	−0.351816	−0.143828
2000:3	N–1	13.57	−0.038240	0.376826
2000:4	N	13.44	−0.079789	−0.091311

Previsiones Puntuales M1

$$\begin{aligned} Y_N(1) &= \mathrm{E}_N[Y_{N+1}] \\ &= \mathrm{E}_N[Y_N + \phi_1(Y_N - Y_{N-1}) + \Phi_1(Y_{N-3} - Y_{N-4}) - \phi_1\Phi_1(Y_{N-4} - Y_{N-5}) + A_{N+1}] \\ &= Y_N + \phi_1(Y_N - Y_{N-1}) + \Phi_1(Y_{N-3} - Y_{N-4}) - \phi_1\Phi_1(Y_{N-4} - Y_{N-5}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_N(1) &= y_N + \hat{\phi}_1(y_N - y_{N-1}) + \hat{\Phi}_1(y_{N-3} - y_{N-4}) - \hat{\phi}_1\hat{\Phi}_1(y_{N-4} - y_{N-5}) \\ &= 13.44 + 0.504119 \times (13.44 - 13.57) + 0.618084 \times (14.89 - 15.32) - 0.311588 \times (15.32 - 15.29) \\ &= 13.09934. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_N(2) &= \mathrm{E}_N[Y_{N+2}] \\ &= \mathrm{E}_N[Y_{N+1} + \phi_1(Y_{N+1} - Y_N) + \Phi_1(Y_{N-2} - Y_{N-3}) - \phi_1\Phi_1(Y_{N-3} - Y_{N-4}) + A_{N+2}] \\ &= Y_N(1) + \phi_1(Y_N(1) - Y_N) + \Phi_1(Y_{N-2} - Y_{N-3}) - \phi_1\Phi_1(Y_{N-3} - Y_{N-4}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_N(2) &= \hat{y}_N(1) + \hat{\phi}_1(\hat{y}_N(1) - y_N) + \hat{\Phi}_1(y_{N-2} - y_{N-3}) - \hat{\phi}_1\hat{\Phi}_1(y_{N-3} - y_{N-4}) \\ &= 13.09934 + 0.504119 \times (13.09934 - 13.44) + 0.618084 \times (13.83 - 14.89) - 0.311588 \times (14.89 - 15.32) \\ &= 12.40642. \end{aligned}$$

Previsiones Puntuales M2

$$\begin{aligned}Y_N(1) &= \mathrm{E}_N[Y_{N+1}]\\ &= \mathrm{E}_N[Y_{N-3} + 2\times(Y_N - Y_{N-4}) - (Y_{N-1} - Y_{N-5}) + A_{N+1} - \theta_1 A_N - \Theta_1 A_{N-3} + \theta_1\Theta_1 A_{N-4}]\\ &= Y_{N-3} + 2\times(Y_N - Y_{N-4}) - (Y_{N-1} - Y_{N-5}) - \theta_1 A_N - \Theta_1 A_{N-3} + \theta_1\Theta_1 A_{N-4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_N(1) &= y_{N-3} + 2\times(y_N - y_{N-4}) - (y_{N-1} - y_{N-5}) - \hat{\theta}_1\hat{a}_N - \hat{\Theta}_1\hat{a}_{N-3} + \hat{\theta}_1\hat{\Theta}_1\hat{a}_{N-4}\\ &= 14.89 + 2\times(13.44 - 15.32) - (13.57 - 15.29)\\ &\quad - 0.366535\times(-0.091311) - 0.902203\times(-0.189197) + 0.330689\times(0.204778) = 13.12188.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_N(2) &= \mathrm{E}_N[Y_{N+2}]\\ &= \mathrm{E}_N[Y_{N-2} + 2\times(Y_{N+1} - Y_{N-3}) - (Y_N - Y_{N-4}) + A_{N+2} - \theta_1 A_{N+1} - \Theta_1 A_{N-2} + \theta_1\Theta_1 A_{N-3}]\\ &= Y_{N-2} + 2\times(Y_N(1) - Y_{N-3}) - (Y_N - Y_{N-4}) - \Theta_1 A_{N-2} + \theta_1\Theta_1 A_{N-3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_N(2) &= y_{N-2} + 2\times(\hat{y}_N(1) - y_{N-3}) - (y_N - y_{N-4}) - \hat{\Theta}_1\hat{a}_{N-2} + \hat{\theta}_1\hat{\Theta}_1\hat{a}_{N-3}\\ &= 13.83 + 2\times(13.12188 - 14.89) - (13.44 - 15.32)\\ &\quad - 0.902203\times(-0.143828) + 0.330689\times(-0.189197) = 12.24096.\end{aligned}$$

5. CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE PREVISIONES

$$\text{Muestra disponible completa}\left[\begin{array}{ll}\text{Muestra de modelización} & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Modelo} \longrightarrow \text{Previsiones}: \hat{y}_N(1), \ldots, \hat{y}_N(L). \\ \text{Muestra de previsión} & \begin{bmatrix} y_{N+1} - \hat{y}_N(1) = \hat{e}_N(1) \\ y_{N+2} - \hat{y}_N(2) = \hat{e}_N(2) \\ \vdots \\ y_{N+L} - \hat{y}_N(L) = \hat{e}_N(L) \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Errores}: \hat{e}_N(1), \ldots, \hat{e}_N(L). \end{array}\right.$$

Raíz del Error Cuadrático Medio (*Root Mean Squared Error*):

$$RMSE = \sqrt{\tfrac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\hat{e}_N(l)^2}\,.$$

Error Absoluto Medio (*Mean Absolute Error*):

$$MAE = \tfrac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}|\hat{e}_N(l)|\,.$$

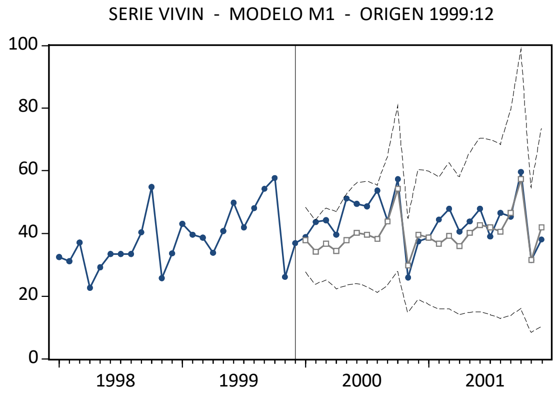
Error Porcentual Absoluto Medio (*Mean Absolute Percentage Error*):

$$MAPE = 100\times\left(\tfrac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left|\frac{\hat{e}_N(l)}{y_{N+l}}\right|\right).$$

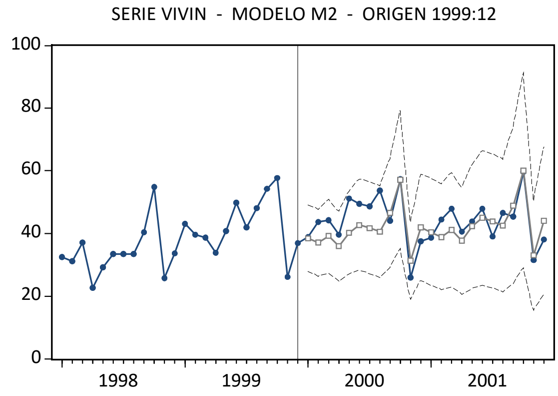
6. EJEMPLO - ST14 : Y = VIVIN (1989:01 1999:12) ➪ S2:EJ7

Modelo M1: ARI(2,1)×IMA(1,1)$_{12}$ para LOG(Y)

Modelo M2: IMA(1,1)×IMA(1,1)$_{12}$ para LOG(Y) ["Airline Model"]



RMSE = 6.585969 MAE = 5.206099 MAPE = 11.438%

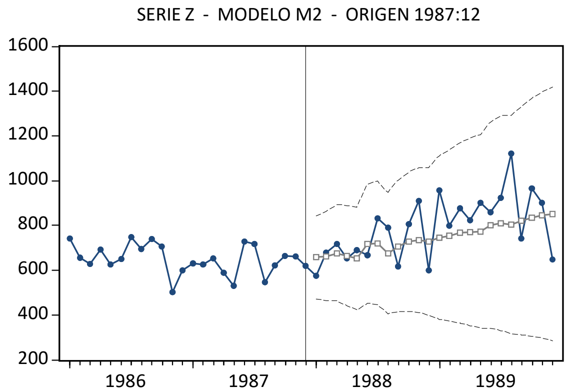


RMSE = 5.434592 MAE = 4.465236 MAPE = 10.255%

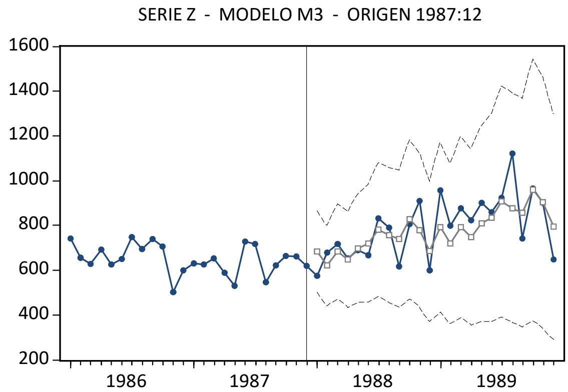
7. EJEMPLO - ST21 : Y = Z (1966:01 1987:12) ➪ S2:EJ8

Modelo M2: IMA(1,1)×AR(1)$_{12}$ con MEDIA para LOG(Y)

Modelo M3: IMA(1,1)×IMA(1,1)$_{12}$ para LOG(Y) ["Airline Model"]



RMSE = 122711.5 MAE = 101656.7 MAPE = 12.488%



RMSE = 93785.08 MAE = 73194.90 MAPE = 9.3574%

OPERACIONES CON EVIEWS

Sección 19 pp. 105-107 de la guía *Introducción al Uso de EViews 4.1*.